



Concours CAE session 2013

Composition : Mathématiques 2 (statistiques, probabilités)

Durée : 2 Heures

Exercice 1

L'étude statistique des ventes de télévisions d'un grand magasin montre que :

- Le nombre de récepteurs vendus en une semaine est une variable aléatoire $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = 12$
- La probabilité pour qu'un client achetant un téléviseur prenne récepteur couleur est $\frac{1}{4}$

- Déterminer les probabilités des événements suivants
 - $(X \geq 15)$ ou $(X \leq 6)$
 - $(X \geq 16)$ sachant que $(X \geq 8)$
- Soit Y le nombre de récepteurs couleurs vendus en une semaine. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y sous l'hypothèse $(X = x)$ que nous noterons Y / x ?
- Déterminer les probabilités des événements suivants :
 - $[(Y = 3) / (X = 12)]$
 - $[(Y > 1) / (X = 10)]$
- Déterminer la loi de la variable aléatoire Y seule. On montrera que Y suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique positive vérifiant l'équation de récurrence linéaire :

$$3u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0 \quad (E)$$

- Résoudre l'équation (E)
 - Calculer la somme puis la limite qui suivent :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

- Soit X la variable aléatoire discrète de référentiel $\mathfrak{R}_X = \mathbb{N}$ dont la fonction densité de probabilité (en abrégé fdp) notée $f_X(x)$ satisfait l'équation (E) ci-dessus.
 - Déterminer les constantes réelles A et B telles que : $\forall x \in \mathbb{N}, f_X(x) = A\lambda_1^x + B\lambda_2^x$ soit une densité de probabilité ($\lambda_1 < \lambda_2$). Que représentent les réels λ_1 et λ_2 ?
 - On suppose que $E(X)$ et $\text{var}(Y)$ existent. Calculer

$$E(X) = \sum_{x \in \mathfrak{R}_X} x f_X(x) \text{ et } \text{var} X = E(X^2) - (E(X))^2$$

- On pose $Y = X - 1$ si $X \geq 1$ et $Y = 0$ si $X = 0$. Calculer $E(Y)$ et $\text{var}(Y)$

Exercice 3

- On donne deux événements A et B tels que : $P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,4$ et $P(B/\bar{A}) = 0,6$
 - Calculer $P(A \cup B)$?
 - Calculer $P(A/\bar{B})$?
- Si A et B sont indépendants, si A et C sont indépendants est-il de même de
 - A et $(B \cap C)$?
 - A et $(B \cup C)$?

Exercice 4

On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par

$$P(X = -1) = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 0) = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{3}$$

- On pose $Y = X^2$. Quelle est la loi de Y ?
- Montrer que $\text{cov}(X, Y) = 0$
Rappel : $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X).E(Y)$
 - Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes

Exercice 5

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega), P)$ et suivant une loi uniforme sur l'ensemble $\{1,2,3\}$. On appelle $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$

- Donner le tableau de la loi conjointe
- Donner la loi marginale de U puis celle de V
- Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?